

## Grundlagenfach 4

# Mathematik

## 1. Stundendotation

1. Klasse	2. Klasse	3. Klasse	4. Klasse
4	4	3	4

Die Schwerpunktfächer Physik und Anwendungen der Mathematik sowie Biologie und Chemie enthalten in den beiden ersten Jahren insgesamt sechs Lektionen "Mathematik für Naturwissenschaften". Aus Gründen der Stoffzuteilung und -abgrenzung wird dieser Bereich zusammen mit dem Grundlagenfach Mathematik dargestellt.

## 2. Bedeutung des Faches

### Generischer und historischer Aspekt

Die Mathematik zeigt in ihrer Entwicklung, dass von der Antike bis zur Neuzeit immer wieder grosse Leistungen erbracht wurden, und dass dieser Prozess keineswegs abgeschlossen ist.

### Logischer Aspekt

Wesentliches Merkmal der Mathematik ist die klare Beweisführung aufgrund strenger logischer Gesetzmässigkeiten, ausgehend von einem für die jeweilige Theorie vorgegebenen Axiomensystem. Die verschiedenen Theorien fügen sich zu einem zusammenhängenden System.

### Heuristischer Aspekt

Die Mathematik ist eine Kunst, Probleme zu lösen und erfordert die Fähigkeit, Probleme zu analysieren, (richtige) Vermutungen anzustellen, und diese mit Phantasie zu beweisen.

### Inhaltlicher Aspekt: Zahlen und Figuren

Die Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen und Figuren: Die Algebra mit formalem und die Geometrie mit anschaulichem Charakter ergänzen und durchdringen sich und bilden ein Ganzes.

### Anwendungsaspekt

Die Mathematik stellt mit ihren algebraischen und geometrischen Methoden Werkzeuge zur Verfügung, welche zur Lösung von Problemen aus der Chemie, der Physik, den Wirtschaftswissenschaften und anderen Gebieten unentbehrlich sind.

## 3. Richtziele

### Grundkenntnisse

- Die Schülerinnen und Schüler kennen die elementaren Gegenstände, Begriffe und Methoden der Mathematik und ihren Aufbau.
- In der Geometrie sind dies geradlinige und gekrümmte Figuren der Ebene und des Raumes und deren Darstellung, Verwandtschaftsbeziehungen zwischen diesen Figuren wie Kongruenz, Ähnlichkeit oder Affinität und die zugehörigen Abbildungen oder Symmetrien, das Ausmessen der Figuren durch Längen-, Inhalts- und Winkelangaben sowie die analytische Beschreibung der Objekte und ihrer gegenseitigen Lage im Koordinatensystem mit und ohne Vektoren.
- In der Raumgeometrie geht es darum, räumliche Probleme zu analysieren und von Hand, mit 3D-Programmen sowie analytisch zu lösen.
- In der Algebra sind es Zahlen und algebraische Terme, Rechenoperationen und Rechenregeln, im Aufbau von den natürlichen Zahlen bis zu den reellen Zahlen, ev. bis zu den komplexen Zahlen, sowie Gleichungen und deren Auflösung.
- In der Analysis geht es um Funktionen und die zugehörigen Kurven sowie um das Tangenten- und Flächenproblem und deren Lösung durch Grenzwertbildung. Darauf aufbauend lernen die Schülerinnen und Schüler die grundlegenden Sätze der Differential- und Integralrechnung kennen.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen den logischen Aspekt der Mathematik, nämlich das Fortschreiten von Axiomen oder Grundeinsichten über Definitionen und zu beweisende Sätze zu neuen Einsichten. Dabei sollen sie die wichtigsten Beweisverfahren wie direkten Beweis, Widerspruchsbeweis und Kontrapositionsbeweis kennen lernen.

### Grundfertigkeiten

- Die Schülerinnen und Schüler sollen das rasche und fehlerfreie Rechnen, die Algebra und die Anfänge der Analysis beherrschen: Termumformungen, Ausmultiplizieren, Bruchterme, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Auflösen von Gleichungen, Untersuchung und graphische Darstellung von Funktionen, Differenzieren und Integrieren der Standardfunktionen.
- Sie üben sich in geometrischen Konstruktionen und lernen die Geometrie kennen als universelles Anschauungsmittel für mathematische Zusammenhänge. Mit Hilfe von Skizzen, Modellen, Graphen und Darstellungsverfahren sollen algebraische Probleme in geometrische übersetzt werden und umgekehrt. Das räumliche Vorstellungsvermögen soll gefördert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, räumliche Gegenstände zu visualisieren und zu skizzieren.
- Die Schülerinnen und Schüler wissen Hilfsmittel wie Taschenrechner und Tabellen einzusetzen, Näherungsverfahren und Software für Mathematik problemgerecht zu nutzen und sind in der Lage, einfache Algorithmen zu entwickeln.
- Die Schülerinnen und Schüler lernen, einfache mathematische Sätze eigenständig zu beweisen.

### Grundhaltungen

- Die Schülerinnen und Schüler sollen sich an exaktes Arbeiten gewöhnen und lernen, einen Sachverhalt mündlich und schriftlich korrekt darzustellen und wiederzugeben. Sie sollen einerseits logische Genauigkeit, andererseits auch den heuristischen Aspekt der Mathematik kennen lernen: Anhand echter Problemsituationen sollen sie sich in der Kunst üben, in beharrlicher und phantasievoller Auseinandersetzung auch schwierige Aufgaben zu lösen - in der Klasse und auf sich allein gestellt.
- Schülerinnen und Schüler sind offen für die ästhetische Komponente mathematischen Tuns.

## 4. Jahres- / Stufenziele und Lerninhalte

Verwendete Abkürzungen:

GFa: Grundlagenfach

GFb: Grundlagenfach für Schwerpunktfächer Biologie/Chemie und Physik/Anwendungen der Mathematik

x: verbindlich

e: empfohlen

### Jahres- / Stufenziele

#### 1. Klasse

Algebra	Anfängeralgebra bis zur linearen Funktion
Geometrie	Planimetrie
Mathematik für Naturwissenschaften	Raumgeometrie: Darstellung einfacher Körper und Einführung in die Vektorgeometrie

#### 2. Klasse

Algebra	Ausbau der Algebra bis zur Potenzlehre
Geometrie	Abschluss der Planimetrie und Einführung in die Trigonometrie
Mathematik für Naturwissenschaften	Raumgeometrie: Metrische Aufgaben und projektive Probleme

#### 3. und 4. Klasse

Algebra	Exponential- und Logarithmusfunktionen
Analysis	Folgen und Reihen, Einführung in die Differential- und Integralrechnung
Geometrie	Ausbau der Trigonometrie und der Vektorgeometrie

### Lerninhalte

#### Algebra 1. Klasse

GFa GFb

##### Algebra mit ganzen und rationalen Zahlen

x	x	Grundoperationen in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ (inkl. Absolutbeträge) und ihre Rechengesetze
x	x	Binomische Formeln
x	x	Verwandlung von Summen in Produkte
e	x	Division von Polynomen
x	x	Bruchterme
x	x	Dezimalbrüche, erste Erwähnung der reellen Zahlen, Rechnen mit Wurzeln
e		Rechnen mit Restklassen

### **Gleichungslehre**

- |   |   |   |
|---|---|---|
| x | x | Repetition der Grundbegriffe aus der Mengenlehre, Aussagen, Aussageformen |
| x | x | Auflösen von Gleichungen, Textaufgaben                                    |
| x | x | Gleichungen mit Parametern  |
| x | x | Einfache Ungleichungen, ev. in Verbindung mit Absolutbeträgen             |

### **Einführung in den Funktionsbegriff**

- |   |   |  |
|---|---|--|
| x | x | Darstellung im Koordinatensystem       |
| x | x | Lineare Funktion $y = ax + b$          |
| x | x | Direkte und indirekte Proportionalität |

### **Potenzlehre I (ganzzahlige Exponenten)**

- |   |   |   |
|---|---|---|
| x | x | Potenzgesetze, Rechnen mit Zehnerpotenzen |
|---|---|---|

## **Geometrie 1. Klasse**

GFa GFb

### **Elementargeometrie I**

- |   |   |  |
|---|---|--|
| x | x | Repetition, bzw. Herleitung der wichtigsten Sätze der Elementargeometrie |
| x | x | Ortsbogen, Inkreis, Dreieckskonstruktionen (Einführung in das Beweisen)  |
|   | e | Flächenverwandlung   |
| x | x | Satzgruppe am rechtwinkligen Dreieck; Wurzelgesetze                      |
| x | x | Repetition Geradenspiegelung, Drehung, Punktspiegelung, Translation      |
|   | e | Verkettung von Kongruenzbildungen, Systematik der Kongruenzabbildungen   |
| x | x | Umgang mit Vektoren  |

### **Ähnlichkeitsgeometrie**

- |        |   |   |
|--------|---|---|
| 2. Kl. | x | Zentrische Streckung, Konstruktionsaufgaben |
| 2. Kl. | x | Strahlensätze                               |
| 2. Kl. | x | Ähnliche Dreiecke                           |

## **Mathematik für Naturwissenschaften 1. Klasse**

### **Einfache Körper (u.a. Würfel, reguläres Tetraeder, reguläres Oktaeder)**

Darstellung in verschiedenen Lagen und verschiedenen Projektionsarten (Schrägbild, Axonometrie, Zweitafelsystem)

Körper mit Ebenen schneiden

Eulerscher Polyedersatz

### **Vektorgeometrie**

Vektoren in der Ebene und im Raum, Darstellung im Koordinatensystem

Geometrische und analytische Darstellung von Geraden und Ebenen

Inzidenzaufgaben konstruktiv und rechnerisch lösen

## Algebra 2. Klasse

GFa GFb

### Lineare Gleichungssysteme

- x x Systeme mit zwei und mehreren Variablen, Textaufgaben, Geradengleichung  $ax + by + c = 0$
- x Determinantenmethode (für 2, ev. auch 3 Variablen)
- x Lineare Regression
- e Lineare Optimierung mit zwei Variablen

### Quadratische Gleichungen und Funktionen

- x x Irrationale und reelle Zahlen
- x x Quadratische Gleichungen, Textaufgaben
- e e Satz von Vieta, Linearfaktorzerlegung
- x x Diskussion der quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  (Scheitelpunkt, Öffnung, einfache Extremalwertprobleme)
- x x Translation eines Graphen im Koordinatensystem
- e x Wurzelgleichungen
- e e Quadratische Ungleichungen

### Potenzlehre II (Wurzeln, rationale Exponenten)

- x x Wurzeln und Potenzen für rationale und reelle Exponenten, Gesetze
- x x Graph der Potenzfunktion  $y = x^p$
- x x Begriff der Umkehrfunktion

## Geometrie 2. Klasse

GFa GFb

### Elementargeometrie II

- x 1. Kl. Zentrische Streckung, Konstruktionsaufgaben
- x 1. Kl. Strahlensätze
- x 1. Kl. Ähnliche Dreiecke
- x x Berechnung des Kreises und seiner Teile
- e Ähnlichkeitsabbildungen
- e Sehnen- und Sekantensatz
- e Goldener Schnitt
- e Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck, Apolloniuskreis
- x x Oberflächen und Volumenberechnungen

### Trigonometrie I

- x x Einführung von sin, cos, tan am rechtwinkligen Dreieck
- x x Beziehungen zwischen sin, cos, tan
- x x Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck
- x x Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel und deren Umkehrfunktionen
- x x Sinussatz und Cosinussatz mit Anwendungen

---

## Mathematik für Naturwissenschaften 2. Klasse

### Metrische Aufgaben

Konstruktion wahrer Grössen

Konstruktion von Normalen und Normalebenen

### Projektive Probleme

Perspektive Affinität in der Ebene (Ellipse als normalaffines Kreisbild)

Einführung in die geometrische Perspektive

## Algebra / Analysis 3. und 4. Klasse

GFa GFb

### Exponentialfunktion und Logarithmen

x x Exponentialfunktion  $y = a^x$ , Wachstums- und Zerfallsprozesse

x x Logarithmen, Rechengesetze

x x Exponentialgleichungen

### Folgen und Reihen

x x Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

x x Grenzwert von Zahlenfolgen und Reihen

### Einführung in die Differentialrechnung

x x Begriff der Ableitung und die verschiedenen Erscheinungsformen (Tangentensteigung, Geschwindigkeit, Änderungsrate)

x x Ableitungsregeln: Summen- und Konstantenregel, Produkt und Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion

x x Höhere Ableitungen

x x Ableitung der Grundfunktionen  $x^r$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\exp$ ,  $\ln$ ; Graphen der Grundfunktionen (Monotonie, Symmetrie, asymptotisches Verhalten)

x x Extremalaufgaben

### Einführung in die Integralrechnung

x x Begriff der Stammfunktion

x x Fundamentalsatz der Analysis

x x Bestimmtes und unbestimmtes Integral

e e Integrationsmethoden

e e Rationale Funktionen

## Geometrie 3. und 4. Klasse

GFa GFb

### Vektorgeometrie

x x Vektoren in der Ebene und im Raum, Darstellung im Koordinatensystem [Vergleiche Raumgeometrie, Mathematik für Naturwissenschaften 1. Klasse]

x x Parameterdarstellung und Koordinatengleichung von Gerade und Ebene [Vergleiche Raumgeometrie, Mathematik für Naturwissenschaften 1. Klasse]

x x Anwendungen auf die Raumgeometrie

---

x	x	Skalarprodukt
x	x	Normalendarstellung von Gerade und Ebene
x	x	Vektorprodukt
	x	Gemischtes Produkt (Spatprodukt)
x	x	Kreis und Kugel

### **Trigonometrie II**

x	x	Einfache goniometrische Gleichungen
x	x	Additionstheoreme
x	x	Harmonische Schwingungen

### **Stochastik 3. und 4. Klasse (fakultativ)**

GFa GFb

x	x	Kombinatorik: Zählprinzipien, Permutationen, verschiedene Typen von Stichproben, Binomialkoeffizienten
x	x	Wahrscheinlichkeit: Diskrete Zufallsexperimente, Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung
x	x	Statistik: Kennzahlen und einfache Darstellungen von Daten, beurteilende Statistik (Test oder Vertrauensintervalle) bei der Binomialverteilung

## **5. Pädagogisch-didaktische Hinweise**

Die Mathematik hat zur Heranbildung vieler heute ganz selbstverständlicher Begriffe Jahrhunderte oder gar Jahrtausende gebraucht. Von Schülerinnen und Schülern zu erwarten, dass sie einen Grossteil der Mathematik selber entdecken, wäre daher vermessen. Deshalb wird man auch in Zukunft nicht darum herumkommen, die Mehrzahl mathematischer Begriffsbildungen von aussen an die Schülerinnen und Schüler heranzutragen.

Den Schülerinnen und Schülern soll immer wieder Gelegenheit gegeben werden, allein oder in kleinen Gruppen selber aktiv zu werden, sei es, das Gehörte zu üben oder anzuwenden, sei es, Kommendes selber zu entdecken.

Besonders in den ersten beiden Jahren dürfen an der Übungsphase keine Abstriche gemacht werden, weil hier grundlegende mathematische Werkzeuge bereitgestellt werden, deren Nichtbeherrschung jedem Bemühen auf der Oberstufe den Boden entzieht.

## 6. Anregungen für den fachübergreifenden Unterricht

<p><b>Physik</b>                  einfache Fehlerrechnung                  Geometrische Optik                  Gleichförmige Bewegung                    Gleichmässig beschleunigte Bewegung                  Gasgesetze                  Kreisbewegung, Schwingungen und Wellen                  Zerlegung von Kräften                  Wachstums- und Zerfallsprozesse                  Geschwindigkeit, Stromstärke, Leistung,                  Beschleunigung                  Arbeit, Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter,                  Kräfte, Geschwindigkeit, Beschleunigung                  Radioaktiver Zerfall</p>	<p>Algebra mit ganzen und rationalen Zahlen                  Ähnlichkeitsgeometrie                  Lineare Gleichungen und Funktionen, Folgen und                  Reihen                  Quadratische Gleichungen und Funktionen                  Potenzlehre                  Trigonometrie                  Trigonometrie, Vektorgeometrie                  Exponential- und Logarithmusfunktion                  Einführung in die Differential- und Integralrechnung                    Vektorrechnung                    Stochastik</p>
<p><b>Chemie</b>                  Kristalle                  Begriff des PH-Werts                  Radioaktiver Zerfall                  Stöchiometrie</p>	<p>Raumgeometrie                  Exponential- und Logarithmusfunktion                  Stochastik                  Lineare Gleichungssysteme</p>
<p><b>Biologie</b>                  Wachstums- und Zerfallsprozesse,                  Populationsentwicklung, Begriff der Information                  Mendelsche Gesetze</p>	<p>Folgen, Exponential- und Logarithmusfunktion                    Stochastik</p>
<p><b>Informatik</b>                  Begriff der Information</p>	<p>Exponential- und Logarithmusfunktion</p>
<p><b>Wirtschaftswissenschaften</b>                  Optimierungslehre                  Wachstums- und Zerfallsprozesse                  einfache Rentenrechnung                  Grenzkosten, Grenzerlös, Preiselastizität</p>	<p>Lineare Optimierung                  Exponential- und Logarithmusfunktion                  Folgen und Reihen                  Differentialrechnung</p>
<p><b>Sprache</b>                  fremdsprachige Texte</p>	<p>verschiedene Möglichkeiten</p>
<p><b>Musik</b>                  Tonsysteme</p>	<p>Folgen und Reihen</p>
<p><b>Bildnerisches Gestalten</b></p>	<p>Stereometrie, Symmetrie, Goldener Schnitt,                  Ähnlichkeit, harmonische Teilung</p>